

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Les différentes parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exemples de l'électricité dans notre entourage

Notre mode de vie actuel est fortement tributaire de l'utilisation de l'électricité. Pour subvenir à nos besoins, d'autres formes d'énergie (mécanique, chimique, nucléaire, etc.) sont converties en énergie électrique. L'électricité est présente dans tout les aspects de notre quotidien : appareils électroménagers, moyens de transports, moyens de communications, etc. Dans ce sujet, on aborde quelques aspects du courant électrique comme l'effet Joule et des manifestations magnétiques.

Données :

- Masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- Charge de l'électron : $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- Conductivité électrique du cuivre : $\gamma_c = 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
- Vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Constante de la loi de Wien : $c_W = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$
- Pour un vecteur $\vec{V}$, $\text{div}(\text{rot } \vec{V}) = 0$.
- D'autres données sont insérées dans le texte.

I Questions de cours

Un générateur électrique crée un champ électrique $\vec{E}$, supposé uniforme, dans un conducteur métallique cylindrique (C) d'axe $X'X$ de longueur $AB = L$, de section S . Les porteurs de charges libres, de charge q , de densité volumique n , sont supposés avoir le même vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport au conducteur : voir figure 1.

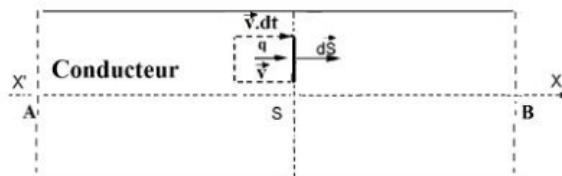


Figure 1 – Conducteur parcouru par un courant électrique

I.1. Généralités sur les courants électriques

I.1.1. Exprimer la densité volumique des charges mobiles $\rho(M)$ en un point M du conducteur.

I.1.2. Donner l'expression de la charge d^3Q contenue dans le volume élémentaire $dv = \vec{v} \cdot d\vec{S} \cdot dt$.

Le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M)$ est défini par : $d^3Q = \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} \cdot dt$

I.1.3. Donner l'expression de $\vec{j}(M)$

I.1.4. En déduire l'intensité I du courant dans le conducteur.

I.2. Bilan de la charge électrique en régime variable

On se propose d'établir le bilan local, unidirectionnel selon $X'X$, de la conservation de la charge. On raisonne sur la tranche de conducteur, de section S , comprise entre x et $x+dx$.

I.2.1. Donner l'expression de la charge dQ_{surf} reçue grâce aux échanges surfaciques, en x et en $x+dx$, pendant une durée élémentaire dt .

I.2.2. Exprimer la variation de la charge au sein de la tranche en fonction de $\rho(x, t)$.

I.2.3. En déduire l'expression du bilan local de charge à une dimension, puis faire la généralisation à trois dimensions.

I.2.4. Retrouver ce bilan en partant de deux relations de Maxwell dans la matière.

I.3. Loi d'Ohm et effet Joule

On étudie le mouvement d'un électron de charge $q = -e$ au sein d'un métal sous l'action du champ électrique $\vec{E}$ du générateur et on modélise les frottements par une force $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}$, où τ est une constante positive.

I.3.1. Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.

I.3.2. Donner, en régime permanent la vitesse limite, et le vecteur densité volumique $\vec{j}$.

I.3.3. En déduire la loi d'Ohm locale et donner l'expression de la conductivité électrique γ .

I.3.4. Exprimer la résistance $R = \frac{U}{i}$, d'un fil de section s , de longueur l et de conductivité γ .

I.3.5. En régime permanent, faire un bilan des puissances pour un porteur de charge q .

I.3.6. En régime permanent, la puissance apportée par le générateur est dissipée sous forme de chaleur : c'est l'effet Joule. Montrer que la puissance volumique de Joule est $p_J(M) = \vec{j}(M) \cdot \vec{E}(M)$.

I.3.7. Pour le conducteur ohmique, donner l'expression intégrale de la puissance totale de Joule en fonction de l'intensité et de la tension.

II Exemples de l'électricité domestique

On étudie des exemples d'échanges thermiques qui accompagnent la circulation de courants électriques dans des conducteurs. Dans toute cette partie, on considère que l'air ambiant est à la température constante $T_0 = 300K$, et son coefficient de convection est $h = 5SI$.

II.1. Préliminaire sur les transferts thermiques

II.1.1. Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique dans un conducteur, on pourra exploiter son analogie avec la loi d'Ohm (vue en question I.3.3). Expliciter les analogies entre les grandeurs électriques et thermiques.

II.1.2. Le conducteur de température de surface T est entouré par l'air, donner l'expression du flux surfacique thermique de convection φ_{cv} reçu par ce conducteur et donné par la loi de Newton.

II.1.3. Rappeler la loi de Stefan donnant le flux thermique surfacique φ_{ra} rayonné par un corps de température T .

II.2. Fils de câblage d'un circuit électrique

Dans la pratique, les fils électriques sont sécurisés par une gaine, ou couverture, isolante électriquement et conductrice thermiquement pour évacuer la chaleur.

On considère un long fil électrique cylindrique de cuivre de longueur L , et de rayon a et d'axe $X'X$. Il est parcouru par un courant électrique d'intensité I de densité volumique uniforme $\vec{j} = j \cdot \vec{u}_x$. Il est chauffé grâce à l'effet Joule et la température y varie. Ce fil est enveloppé par une gaine de polyéthylène (PE) cylindrique d'épaisseur e , et celle-ci est en équilibre thermique avec l'air ambiant. On note par λ et λ_g les conductivités thermiques respectives du fil et de la gaine. On se place en régime permanent. Voir figure 2.

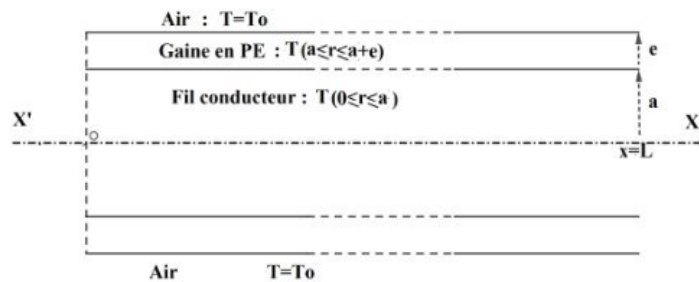


Figure 2 – Conducteur gainé parcouru par un courant électrique

- II.2.1. Justifier qu'on puisse considérer que la température en un point M, $0 \leq r \leq a + e$, ne dépende que de sa distance r à l'axe. Montrer qu'il y'a un flux thermique $\vec{j}_t$ radial.
- II.2.2. Exprimer la puissance de Joule dissipée par le fil vers la gaine.
- II.2.3. Déterminer l'expression de la température $T(r)$ dans la gaine.
- II.2.4. Déterminer la loi de température $T(r)$, pour $0 \leq r \leq a$, dans le fil.
- II.2.5. Donner l'expression de la température maximale du fil T_{max} .
- II.2.6. Soit $T_{f,g}$ la température de fusion de la gaine. Déterminer l'expression de l'intensité maximale I_{max} à ne pas dépasser.

II.3. Lampe à incandescence

On considère une lampe à incandescence de puissance $P=100W$ sous une tension efficace $V = 220V$. Son filament de tungstène (symbole W) est cylindrique de longueur $L = 0,5m$ et de rayon $a = 15\mu m$. A cause de l'effet Joule le filament est porté à la température de fonctionnement T_f .

Pour le tungstène, on donne : la masse volumique $\mu = 1,93.10^4 kg.m^{-3}$ et la capacité thermique massique (supposée constante) $C \approx 138 J.kg^{-1}.K^{-1}$.

- II.3.1. La variation de la conductivité électrique du tungstène avec la température (en K), peut être modélisée¹ par : $\gamma_W(T) = k.T^{-1,2} S.m^{-1}$, avec $k = 1,67.10^{10} SI$.
En déduire la valeur de T_f .
- II.3.2. Lors de l'établissement de l'état d'équilibre du filament, on suppose la transformation adiabatique, estimer le temps τ mis pour atteindre la température T_f .
- II.3.3. En régime permanent, si on suppose que la puissance électrique reçue est rayonnée, quelle serait la valeur de la température de travail T'_f ? Indiquez les approximations utilisées.

1. D.C. Agrawal Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 5, No. 2, June 2011

II.3.4. Dans quel domaine du spectre électromagnétique le filament émet-il principalement ?

II.4. Protection contre les surintensités par un fusible

Le fusible est un fil conducteur placé en série dans le circuit électrique à protéger. Il fond et ouvre le circuit s'il est soumis à une forte chaleur engendrée par un courant intense.

Considérons un fusible constitué d'un fil cylindrique de plomb de longueur l , de rayon a , et d'axe $X'X$. Le fil métallique est porté à ses deux extrémités à la température T_0 , et sa paroi latérale est adiabatique. Lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité I , il s'échauffe par effet Joule. On note μ_p sa masse volumique, C_p sa capacité calorifique massique, γ_p sa conductivité électrique et λ_p sa conductivité thermique. Voir figure 3.

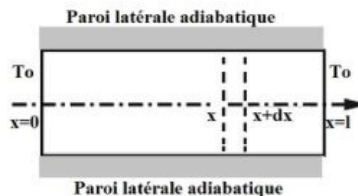


Figure 3 – Fusible

- II.4.1. On suppose que la température est de la forme $T(x, t)$. En raisonnant sur une tranche infinitésimale d'épaisseur dx , établir l'équation différentielle vérifiée par la température.
- II.4.2. En régime permanent, déterminer la loi de température $T(x)$
- II.4.3. Donner la position x_{max} du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale I_{max} supportée par le fusible.
- II.4.4. Déterminer l'expression de la température correspondante T_{max}
- II.4.5. Soit $T_{f,p} = 600K$ la température de fusion du plomb, déterminer l'expression du rayon minimal a_{min} tolérant un courant d'intensité $I_{max} = 25A$.
Calculer a_{min} sachant que $l = 1cm$, $\gamma_p = 4,81 \cdot 10^6 S.m^{-1}$ et $\lambda_p = 35,3.W.K^{-1}.m^{-1}$.
- II.4.6. Justifier pourquoi on utilise les fusibles plutôt en plomb, qu'en un autre métal.

III Exemples d'électricité dans l'atmosphère

L'électricité atmosphérique influe sur les systèmes électriques usuels, surtout en présence de la foudre qui est un courant de grande intensité entre les nuages et le sol terrestre.

III.1. Atmosphère nuageuse

On considère un nuage situé entre les altitudes $z = h_1 = 2km$ et $z = h_2 = 10km$ et de section horizontale $S = 1km^2$. Dans la modélisation proposée, on néglige tout effet de bord et on suppose que les densités volumiques de charges ne dépendent que de l'altitude z ; et que le champ électrique peut se mettre sous la forme : $\vec{E}(M) = E(z) \cdot \vec{u}_z$. Voir figure 4.

- III.1.1. Près du sol, dans la région $0 \leq z \leq h_0$, les charges positives sont réparties avec la densité volumique de charges uniforme ρ_0 .

Déterminer le champ électrique $E(z)$ dans cette zone, en prenant $E(z = 0) = 0$.

- III.1.2. Montrer que pour $h_0 \leq z \leq h_1$, le champ électrique est uniforme, et donner sa valeur E_0 .

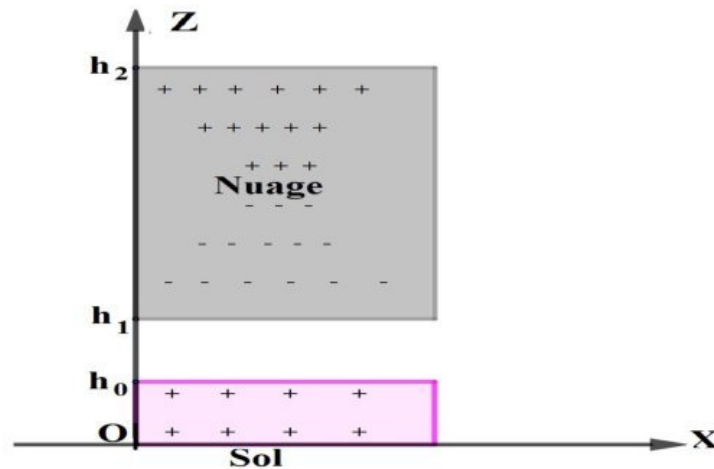


Figure 4 – Distributions de charges d'une atmosphère nuageuse

III.1.3. A l'intérieur du nuage, on suppose que $\rho(z)$ varie linéairement avec z dans l'intervalle $\rho_1 \leq \rho(z) \leq -\rho_1$, où $\rho_1 = \rho(z = h_1) < 0$ est la densité volumique de charges pour $z = h_1$.

Déterminer l'expression de $\rho(z)$ pour $h_1 \leq z \leq h_2$. On pose $h_m = \frac{h_1 + h_2}{2}$.

III.1.4. Donner l'expression de $E(z)$ dans le nuage.

III.1.5. Représenter l'allure du champ électrique dans la région $0 \leq z \leq h_2$

III.2. Modélisation de la foudre

Le système nuage-sol peut être assimilé à un condensateur géant de capacité C . Si le champ entre les armatures dépasse le champ disruptif E_{max} , il se forme un canal conducteur dans l'air. L'éclair nuage-sol peut être modélisé schématiquement comme la décharge d'un condensateur de capacité C , à travers ce conducteur, supposé ohmique, de résistance R . Le condensateur est initialement chargé sous une tension continue $u_0 = 10^7 V$ positive. Voir figure 5.

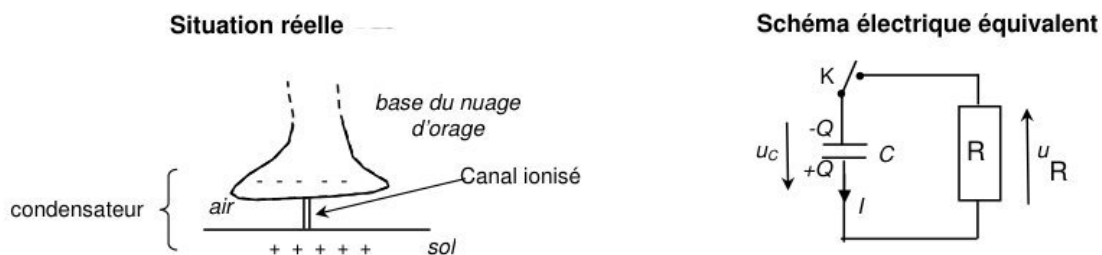


Figure 5 – Décharge d'un condensateur

III.2.1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $Q(t)$.

III.2.2. En déduire l'expression de l'intensité $I(t)$.

III.2.3. Les variations de l'intensité du courant de la foudre sont représentées par la figure 6a et modélisées par la figure 6b. Évaluer la charge écoulee par la foudre.

III.2.4. Estimer l'énergie électrique E_e initiale de ce condensateur.

III.2.5. Calculer la valeur de la capacité C du condensateur considéré.

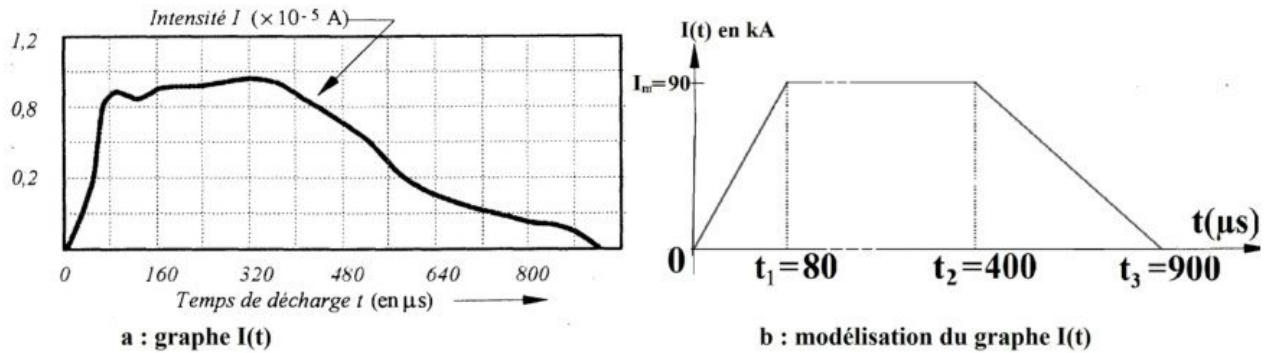


Figure 6 – Intensité du courant lors d'un éclair

III.3. Activité magnétique

Lors d'un coup de foudre l'air est ionisé dans un canal conduisant du sol au nuage orageux. On assimile l'éclair à un fil électrique cylindrique infini, d'axe OZ et de rayon a , parcouru par un courant $I(t)$, permanent, uniformément réparti dans une section droite.

- III.3.1. Que peut-on déduire des considérations d'invariances et de symétries, pour le champ magnétique $\vec{B}(r, \theta, z)$ créé par cette distribution. On utilisera la base cylindrique $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\}$.
- III.3.2. Déterminer le vecteur champ magnétique créé en tout point M de l'espace.
- III.3.3. A partir de la force de Laplace, justifiez la tendance du canal de l'éclair à imploser.

La foudre engendre, donc, des champs magnétiques variables qui peuvent perturber les circuits électriques domestiques. On considère le circuit électrique domestique qu'on assimile géométriquement à un cadre carré de côté $d = 5m$, situé à la distance moyenne D de l'éclair. Le circuit électrique et l'éclair sont coplanaires : voir figure 7.

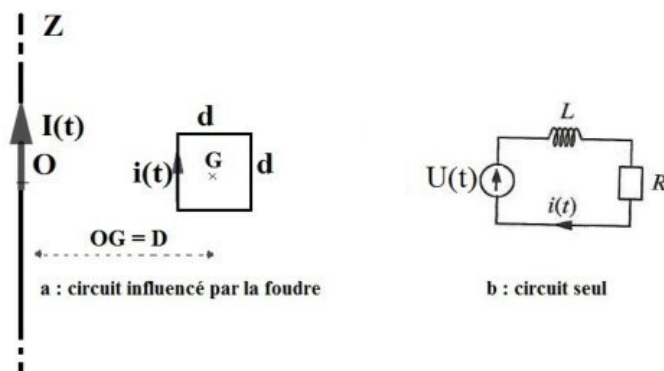


Figure 7 – Influence magnétique éclair-cadre

- III.3.4. Justifier l'apparition d'une force électromotrice d'induction $e(t)$, que l'on exprimera en respectant la convention d'orientation du circuit.

Le circuit électrique est modélisé par une alimentation alternative de force électromotrice $U(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$, une bobine d'inductance L et une résistance R en série : voir figure 7b.

- III.3.5. Établir l'équation différentielle électrique complète de ce circuit, reliant $I(t)$ et $i(t)$, courant circulant dans le circuit électrique en présence de l'éclair.

III.3.6. On peut caractériser la perturbation de la foudre par $\varepsilon = \frac{|e(t)|_{\max}}{U_m}$. On donne $U_m = 311V$.

III.3.6.1. Montrer que pour avoir $\varepsilon \leq 1\%$, on doit avoir $D \geq D_{\min}$; donner l'expression de la distance minimale $D_{\min}$. On justifiera les éventuelles approximations utilisées.

III.3.6.2. En vous inspirant de III.2, donner un ordre de grandeur de $D_{\min}$.

III.4. Décharge de la foudre dans le sol

Le sol est assimilé à un conducteur, homogène et isotrope, de conductivité $\gamma_s = 2.10^{-2} Sm^{-1}$. Quand la foudre tombe sur un arbre, celui-ci peut être assimilé à une tige conductrice OZ parcourue par un courant $I = 10kA$.

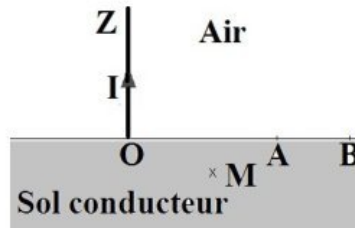


Figure 8 – Distribution de courants dans le sol conducteur

III.4.1. En régime permanent, déterminer l'expression du vecteur densité de courant en un point quelconque dans le sol $\vec{j}(M)$. On utilisera les propriétés de symétrie et d'invariance.

III.4.2. En déduire le potentiel électrique $V(M)$ en un point quelconque M dans le sol en supposant le potentiel nul à l'infini.

III.4.3. Déterminer l'expression de la différence de potentiel $V = V_A - V_B$, sachant que O, A et B sont alignés et qu'on pose $OA = D$, $OB = D + p$.

III.5. S'abriter sous un arbre, en temps d'orage ?

Un homme, de masse $m = 70kg$, court avec un pas de 1m, vers l'arbre pour s'abriter d'un orage. Estimez les risques qu'il peut encourir si l'arbre est touché par la foudre, sachant que celle-ci dure $900\mu s$. Les raisonnements seront accompagnés, d'abord, par des expressions littérales. On donne :

La résistance électrique de son corps vaut $R = 2k\Omega$.

Pour $i_H \geq I_{\max} = 50mA$, il y a risque de défibrillation cardiaque pouvant entraîner la mort.

La capacité calorifique massique de l'eau est $C = 4,18.kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

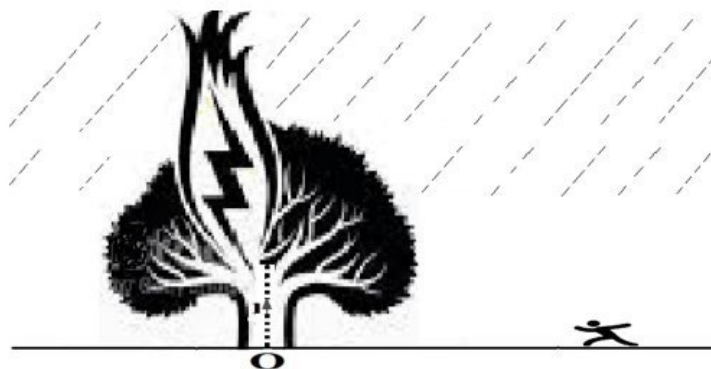


Figure 9 – Foudre se déchargeant à travers un arbre