

Ministère Chargé de l'Enseignement
Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

**Concours National Commun
d'Admission aux
Grandes Écoles d'Ingénieurs
Session 2003**

ÉPREUVE DE PHYSIQUE I

Durée 4 heures

Concours MP

Cette épreuve comporte 9 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

Autour d'exo-planètes

Depuis la découverte en 1995 par M. MAYOR et D. QUELOZ de la première exo-planète ou planète extra-solaire, le nombre de celles-ci n'a cessé d'augmenter pour dépasser actuellement la centaine. Au delà du rêve qu'apporterait la découverte d'une autre " terre ", la recherche d'exo-planète nécessite la mise à contribution de différentes avancées scientifiques et technologiques. Elle permettra certainement une évolution des idées actuelles sur la structure de l'Univers. Ce problème aborde quelques aspects relatifs aux propriétés orbitales d'un système composé d'une étoile et d'une planète, puis les conditions de visibilité d'une exo-planète. Il passe aussi en revue les méthodes indirectes de leur détection avant d'aborder les techniques qui pourraient servir pour leur observation directe et qui sont encore à l'étude.

Données utiles et notations

- constante de PLANCK : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} J.s$
- constante de BOLTZMAN : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J.K^{-1}$
- célérité la lumière dans le vide : $c_0 = 3 \cdot 10^8 m.s^{-1}$
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} kg^{-1}.m^3.s^{-2}$
- unité astronomique : $1 UA = 1,5 \cdot 10^{11} m$
- année lumière : $1 AL = 9,5 \cdot 10^{15} m$
- température de surface du Soleil : $T_\odot = 6 \cdot 10^3 K$
- rayon du Soleil : $R_\odot = 7,0 \cdot 10^8 m$
- rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^6 m$
- distance Terre - Soleil : $TS = 1UA$
- rayon de Jupiter : $R_J = 7,1 \cdot 10^7 m$
- la fonction sinus cardinal , sinc , est définie par $sinc(x) = \frac{\sin x}{x}$
- valeurs approchées M_i des premiers maxima de $f(x) = sinc^2(\pi x)$ ainsi que leurs abscisses x_i :

x_i	0	1,43	2,46	3,47	4,48	...
M_i	1,0	$4,7 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	...

- valeurs approchées M'_i des premiers maxima de $g(x) = \frac{sinc^2(\pi x)}{(1-x^2)^2}$ ainsi que leurs abscisses x'_i :

x'_i	0	2,36	3,41	4,43	5,44	...
M'_i	1,0	$7,1 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$	...

- $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

1^{ère} partie :

Quelques caractéristiques orbitales

La détection d'une exo-planète P en orbite autour d'une étoile E passe souvent par la mise en évidence de la perturbation du mouvement de l'étoile due à la présence de la planète P. Pour simplifier, on considère que le système $\{E, P\}$ constitué de l'étoile E, de masse m_E , et

de la planète P, de masse m_P , est isolé. Le problème est ainsi ramené à l'étude classique d'un problème à deux corps.

On définit alors un mobile fictif F par $\vec{GF} = \vec{EP}$, G étant le centre d'inertie du système $\{E, P\}$, et on lui affecte la masse réduite μ de $\{E, P\}$ donnée par $\mu = \frac{m_E \cdot m_P}{m_E + m_P}$.

On rappelle que, dans ce cas, les grandeurs cinétiques (énergie cinétique et moment cinétique) du système $\{E, P\}$ se confondent avec celles du mobile fictif F. D'autre part, tout se passe comme si le mobile fictif F était soumis dans le référentiel barycentrique $*R$ de $\{E, P\}$ à une force égale à celle exercée sur la planète P de la part de l'étoile E.

- 1.1 Quel est le nombre de planètes composant le système solaire? Citer les noms de trois d'entre elles.
- 1.2 En appliquant un théorème adéquat de la mécanique, montrer que le mouvement de F est plan
- 1.3 On suppose que, dans $*R$, la trajectoire du mobile fictif F est circulaire de rayon R.
- 1.3.1 Montrer que l'étoile E et la planète P ont elles aussi des trajectoires circulaires.
- 1.3.2 En appliquant le théorème de la résultante cinétique, exprimer le rayon R de la trajectoire de F en fonction de G, m_E , m_P et de la période T du mouvement circulaire.
- 1.3.3 En déduire les expressions des rayons GE et GP des trajectoires respectives de E et P.
- 1.4 On considère toujours le cas des trajectoires circulaires.
- 1.4.1 Établir la relation entre le module v_E de la vitesse de l'étoile et le module v_P de la vitesse de la planète par rapport au référentiel $*R$.
- 1.4.2 Exprimer ces deux vitesses en fonction de G, m_E , m_P ainsi que la période T du mouvement. Que deviennent ces expressions lorsque l'on tient compte du fait que $m_P \ll m_E$?
- 1.4.3 **Application numérique** : l'étoile HD19994 possède une planète P beaucoup moins massive en orbite circulaire de rayon $EP = 1,3$ UA qu'elle parcourt en 454,2 jours. Quelle est la masse de l'étoile HD19994?
- 1.5 En réalité les mesures ne sont sensibles qu'à la composante $V_{//}(t)$ de la la vitesse de l'étoile E parallèlement à l'axe de visée. Soit θ l'angle entre la normale au plan de la trajectoire de E et l'axe de visée (figure 1).

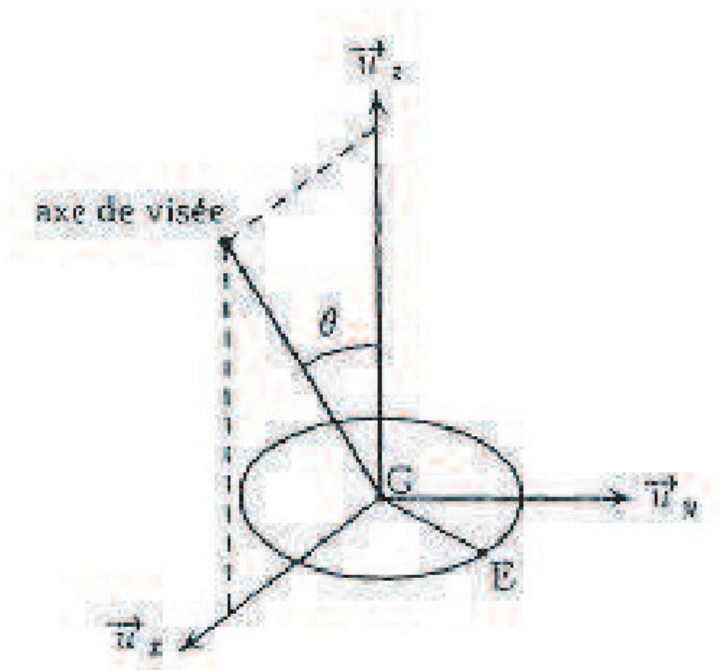


Fig 1 : Axe de visée

- 1.5.1** Exprimer la vitesse $\vec{v}_E(t)$ de l'étoile E sur sa trajectoire circulaire à l'instant t en fonction de v_E , t et T et en déduire $V_{//}(t)$; l'origine des temps sera choisie à un moment où $\vec{v}_E$ est colinéaire avec $\vec{u}_x$.
- 1.5.2** Exprimer la masse m_P de la planète en fonction de la valeur maximale $V_{//max}$ de $V_{//}(t)$, de la période T, de θ , G et m_E .
- 1.5.3** Commenter cette expression en discutant notamment des meilleures conditions de visée pour pouvoir détecter des planètes de masse relativement faible.

2^{ème} partie : Visibilité de la planète

L'un des problèmes majeurs rencontrés lors de la détection des exo-planètes est lié à leur visibilité. En effet, l'exo-planète est toujours très peu lumineuse devant son étoile. On se propose dans cette partie d'aborder ce problème dans le but de déterminer le domaine spectral adéquat pour une meilleure détection. Les températures T_E de l'étoile et T_P de la planète seront supposées uniformes. On considère que l'étoile E se comporte comme un corps noir de température T_E . On se limitera aussi à des mouvements circulaires. Les rayonnements seront en plus supposés isotropes.

2.1 Caractéristiques générales

Considérons un corps noir en équilibre thermodynamique à la température T. La puissance rayonnée par unité de surface et par unité de longueur d'onde, ou flux hémisphérique spectral, est donnée par la loi de PLANCK :

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp \frac{hc_0}{\lambda k_B T} - 1} \quad (1)$$

- 2.1.1** Représenter graphiquement l'allure de $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ en fonction de λ pour une température T fixée.
- 2.1.2** Montrer que la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum du flux est donnée par la loi de déplacement de WIEN :

$$\lambda_m T = \gamma \frac{hc_0}{k_B} = k_W \quad (2)$$

où γ est la solution numérique d'une équation que l'on précisera. Par la suite on prendra $k_W = 3000 \mu m.K$

- 2.1.3** Calculer numériquement la longueur d'onde λ_Θ correspondant au maximum du spectre solaire. À quelle radiation correspond-elle ? Ceci est-il en accord avec l'observation quotidienne ?
- 2.1.4** Exprimer le flux hémisphérique surfacique total émis par le corps noir et montrer qu'il obéit à la loi de STEFAN, Donner l'expression de la constante σ de STEFAN. On donne :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

2.2 Température d'équilibre de la planète

L'exo-planète P de rayon R_P est supposée en orbite circulaire de rayon EP autour de l'étoile E. On suppose que la température T_P de la planète est uniforme en tout point de sa surface.

- 2.2.1** Exprimer le flux de rayonnement Φ_P reçu par la planète en fonction du flux radiatif Φ_E émis par l'étoile ainsi que de R_P et EP.

- 2.2.2** Exprimer de même les flux réfléchi Φ_r et absorbé Φ_a par la planète en fonction du flux Φ_E émis par l'étoile ainsi que l'albédo A de la planète défini comme étant la fraction réfléchie du rayonnement stellaire Φ_E .
- 2.2.3** Exprimer le flux Φ_e émis par la planète supposée à l'équilibre thermodynamique en fonction de sa température T_P et de son rayon R_P . On supposera pour cela que la planète se comporte comme un corps noir de température T_P .
- 2.2.4** Quelle relation simple existe-t-il entre Φ_e et Φ_a à l'équilibre ? En déduire que la température de la planète est reliée à la température T_E de l'étoile par la relation :

$$T_P = T_E(1 - A)^{1/4} \left(\frac{R_E}{2EP} \right)^{1/2} \quad (3)$$

2.2.5 Application numérique

- 2.2.5.1** Déterminer la température moyenne de la Terre prévue par ce modèle et commenter la valeur ainsi obtenue. La valeur communément admise pour l'albédo terrestre est $A = 0,34$.
- 2.2.5.2** Déterminer la température de la planète HD19994b qui orbite autour de l'étoile HD19994 sachant que $EP = 1,3 \text{ UA}$ et que cette étoile a des caractéristiques proches de celles du Soleil. On prendra pour valeur de l'albédo $A = 0,5$. Commenter.
- 2.2.5.3** Calculer numériquement la longueur d'onde λ_P correspondant au maximum du spectre de la planète HD19994b. Commenter.

2.3 Condition photométrique d'observation

Un observateur terrestre pointe un télescope en direction du couple $\{E, P\}$. On se propose à présent de déterminer le domaine spectral qui favorise l'observation de l'exo-planète.

- 2.3.1** Exprimer le rapport ϱ des puissances émises par la planète et par l'étoile en fonction de la longueur d'onde λ , des longueurs d'onde λ_E et λ_P correspondant respectivement au maximum de l'émission de E et de P ainsi que du rapport des rayons de P et E.
- 2.3.2** Représenter graphiquement $\varrho(\lambda)$ et déterminer la limite ϱ_ℓ de $\varrho(\lambda)$ pour les grandes longueurs d'onde en fonction de R_E , R_P , T_E et T_P . Calculer numériquement ϱ_ℓ pour un couple du type $\{\text{Soleil}, \text{Terre}\}$ et commenter.
- 2.3.3** Quel est, du point de vue photométrique, le domaine favorable à l'observation de la planète P ?

3^{ème} partie :

Détection par la méthode indirecte des transits

La recherche d'exo-planètes autour d'étoiles autres que le Soleil peut se faire grâce à des mesures photométriques précises. Le principe repose sur la possibilité de mettre en évidence l'affaiblissement de luminosité observée lors du passage de la planète à détecter entre l'étoile et l'observateur. Pour cela, il faut pouvoir réaliser des mesures de haute précision du flux lumineux comme ce sera le cas sur le satellite COROT dont le lancement est prévu pour 2005-2006.

- 3.1** La figure 2 représente la variation relative $\frac{d\Phi}{\Phi_E}$ du flux total détecté au cours du temps lors du passage d'une planète devant son étoile parente. Commenter cette figure en indiquant les positions de la planète correspondant aux différents domaines du graphique. On représentera ces différentes positions relatives du couple {étoile, planète} dans le plan de la trajectoire.

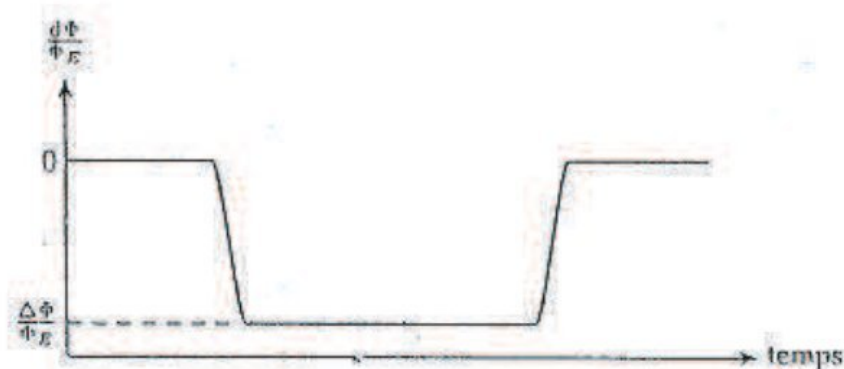


Fig 2 : Effet de l'occultation de l'étoile par le passage d'une planète.

- 3.2 On note Φ_E le flux hémisphérique total émis par l'étoile de rayon R_E et Φ_P celui émis par la planète de rayon R_P .
- 3.2.1 Exprimer la variation de flux $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E}$ (figure 2) en fonction de R_E et R_P . On supposera pour simplifier que l'axe de visée est perpendiculaire à la normale au plan de la trajectoire de la planète.
- 3.2.2 Calculer $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E}$ pour une planète du type Jovienne (comparable à Jupiter) ainsi que pour une planète du type tellurique (comparable à la Terre) en orbite autour d'une étoile du même type que le Soleil. Commenter.
- 3.2.3 L'exo-planète OGLE-TR-56b annoncée le 30 janvier 2003 a été détectée par la méthode des transits. La variation relative de flux enregistrée est de $1/1000^e$. En déduire le rapport des rayons de la planète et de son étoile parente.

4^{ème} partie : Observation directe

4.1 Coronographe de Lyot

Dans cette partie du problème, on s'intéresse à l'observation d'un système $\{E, P\}$ à l'aide d'un télescope au sol ou dans l'espace. Le télescope en question est un télescope du type CASSE-GRAIN constitué d'un miroir primaire parabolique de diamètre D et d'un miroir secondaire hyperbolique. Nous admettrons dans toute la suite qu'un tel système de miroirs est *formellement* équivalent à une seule lentille mince convergente L_1 de grande dimension munie d'un diaphragme circulaire D de même diamètre D que le miroir primaire et de distance focale image f_{i1} . La figure 3 montre la lentille L_1 ainsi que la lentille L_2 qui schématise l'oculaire. Ces lentilles sont disposées de sorte que le système $\{L_1, L_2\}$ soit afocal. Le foyer image F_1 de L_1 sera appelé foyer du télescope et le plan de front passant par F_1 est le plan focal du télescope. Pour les applications numériques, on prendra $D = 15 \text{ m}$.

Pour simplifier les calculs, on considère un modèle unidimensionnel de la pupille d'entrée du télescope. Dans le cadre de ce modèle, le diaphragme circulaire D de diamètre D est remplacé par une fente F de largeur D selon l'axe Ox et allongée selon Oy (figure 3).

Ce modèle, malgré sa simplicité, permettra de rendre compte des propriétés fondamentales du système.

On s'intéresse plus particulièrement au couple composé de l'étoile HD19994 et de sa planète HD19994b. Pour ce couple, la distance entre l'étoile E et la planète P est $EP = 1,3 \text{ UA}$; il se

trouve à une distance de la Terre $TE = 72 \text{ AL}$. On supposera que le plan de la trajectoire est perpendiculaire à l'axe de visée.

Un filtre très sélectif permet de sélectionner une longueur d'onde de travail λ dans le domaine de l'infrarouge pour laquelle le rapport des intensités I_0^P de la planète et I_0^E de l'étoile vaut $5 \cdot 10^{-6}$.

On prendra pour les applications numériques $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$.

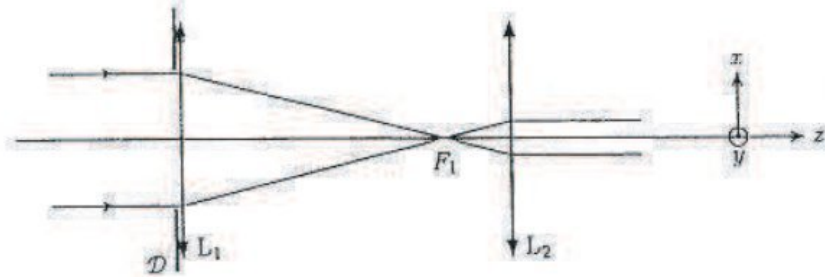


Fig 3 : Système de lentilles minces convergentes équivalent au télescope muni de son oculaire.

- 4.1.1 Citer le nom d'un télescope installé dans l'espace.
- 4.1.2 Dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, représenter l'image du système $\{E, P\}$ dans le plan focal du télescope lorsque l'axe du télescope est dirigé vers l'étoile E.
- 4.1.3 Énoncer clairement le principe de HUYGHENS-FRESNEL.
- 4.1.4 Le télescope est tout d'abord éclairé par une onde plane monochromatique provenant d'une source unique éloignée située dans la direction faisant un angle α_0 avec l'axe principal du télescope dans le plan $y = 0$.
 - 4.1.4.1 Calculer la répartition de l'intensité lumineuse $I(x)$ dans le plan focal du télescope.
 - 4.1.4.2 Représenter graphiquement l'allure de $I(x)$ en précisant les abscisses des points où l'intensité est nulle ainsi que la largeur de la tache centrale de diffraction.
- 4.1.5 L'axe principal du télescope est maintenant dirigé dans la direction de l'étoile HD19994 autour de laquelle orbite la planète HD19994b. Le problème central de l'observation directe est d'atténuer considérablement la tache centrale de diffraction de l'étoile pour ne pas éblouir l'image géométrique de la planète et permettre ainsi son observation.
 - 4.1.5.1 Exprimer l'intensité résultante dans le plan focal du télescope.
 - 4.1.5.2 Montrer que l'on peut disposer un cache opaque de largeur adéquate ℓ_0 dans le plan focal du télescope pour arrêter la lumière du lobe central ainsi que celle des deux lobes latéraux (un de chaque côté) sans affecter la tache centrale de la planète. Exprimer ℓ_0 en fonction de λ , D et f_{i1} .
 - 4.1.5.3 Montrer que le pic central de la figure de diffraction de la planète reste noyé dans la lumière provenant de l'étoile. On pourra s'aider des données numériques du début de l'énoncé.
- 4.2 Étude d'une pupille apodisée

L'étude précédente montre que même si on occulte la tache centrale de diffraction de l'étoile, la lumière en provenance de la planète reste noyée dans celles des maxima secondaires. Pour tenter de résoudre cette difficulté, certains chercheurs proposent de faire appel à la technique d'apodisation.

Cette technique consiste à utiliser une pupille diffractante dont la transmittance pupillaire t ou coefficient complexe de transmission en amplitude, n'est pas uniforme. On s'intéresse par la suite à une transmittance en $\cos^2$ telle que, dans le plan de la fente F on a :

$$t = \begin{cases} \cos^2(\frac{\pi x}{D}) & \text{pour } |x| \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4)$$

- 4.2.1 Calculer la répartition d'intensité $I(x)$ dans le plan focal du télescope lorsque celui-ci est éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ provenant d'une source lointaine dans la direction faisant un angle α_0 avec l'axe principal du télescope dans le plan zOx .
- 4.2.2 Représenter graphiquement l'allure de $I(x)$ et déterminer les abscisses des points où l'intensité est nulle.
- 4.2.3 Quelle est la largeur de la tache centrale de diffraction ? Commenter en dégagant les effets du masque (4) sur la figure de diffraction.
- 4.2.4 On s'intéresse au couple constitué de l'étoile HD19994 et de sa planète HD19994b. Le télescope est ainsi orienté dans la direction de HD19994. On suppose dans cette question qu'un cache opaque de largeur ℓ_0 calculée à la question 4.1.5.2. est interposé dans le plan focal du télescope.
 - 4.2.4.1 Montrer que le cache opaque permet cette fois d'arrêter la lumière de la tache centrale de diffraction de l'étoile.
 - 4.2.4.2 Calculer le rapport de l'intensité du maximum central provenant de la planète à celle du premier maximum non caché provenant de l'étoile. Comparer au cas sans apodisation.
 - 4.2.4.3 L'utilisation du cache opaque et du masque d'apodisation (4) permet-elle d'isoler la lumière provenant de la planète ?
 - 4.2.4.4 Comment peut-on accentuer l'effet de l'apodisation ?

4.3 Apodisation à l'aide de l'interféromètre de Michelson

Dans l'impossibilité de pouvoir disposer de masque d'apodisation d'aussi grande dimension. que les pupilles d'entrée des grands télescopes, certains chercheurs ont proposé un montage interférométrique pour réaliser l'apodisation. Le montage que l'on se propose d'étudier est construit autour d'un interféromètre de MICHELSON. La figure 4 représente le banc d'essai en laboratoire d'un tel montage.

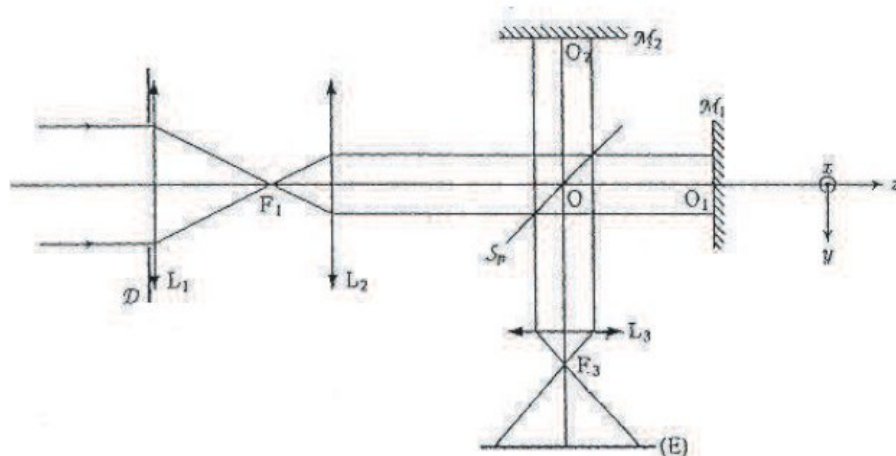


Fig 4 : Banc d'essai d'un montage interférométrique d'apodisation.

La fente F schématise la pupille d'entrée du télescope et la lentille convergente L_1 représente la lentille équivalente aux miroirs du télescope. La lentille convergente L_2 permet d'éclairer

l'interféromètre en lumière parallèle et forme l'image de la pupille d'entrée du télescope sur le miroir de l'interféromètre. La lentille L_3 permet de conjuguer le miroir et l'écran d'observation E.

4.3.1 L'interféromètre de MICHELSON est constitué de :

- un miroir plan M_1 mobile en translation le long de l'axe Oz et en rotation autour des axes O_1x et O_1y ;
- un miroir plan M_2 mobile en rotation autour des axes O_2x et O_2z ;
- une lame séparatrice S en verre d'épaisseur uniforme rendue semi-réfléchissante ; elle transmet 50% du flux incident et en réfléchit 50% ;
- une lame compensatrice C en verre de même épaisseur que la lame séparatrice.

Un réglage préliminaire permet de rendre la lame compensatrice C parallèle à la lame séparatrice S. Dès lors on peut considérer un modèle idéal d'interféromètre de MICHELSON dans lequel la lame séparatrice est remplacée par une séparatrice S_p d'épaisseur nulle (figure 4), fournissant deux ondes de même intensité et n'introduisant pas de déphasage supplémentaire entre les deux ondes qui interfèrent.

4.3.1.1 Par quel procédé technologique, parvient-on à augmenter le pouvoir de réflexion d'une lame de verre pour la rendre semi-réfléchissante ?

4.3.1.2 Quel est le rôle de la lame compensatrice C ?

4.3.1.3 Comment parvient-on dans la pratique à disposer la lame compensatrice C parallèlement à la lame séparatrice S ?

4.3.1.4 Décrire un protocole expérimental permettant d'approcher au mieux " le contact optique " : M_1 et M_2 perpendiculaires entre eux et à égale distance de la séparatrice S_p .

4.3.2 À partir du réglage précédent (contact optique), on fait tourner le miroir M_1 d'un angle $+\frac{\alpha}{2}$ positif autour de l'axe O_1x et le miroir M_2 du même angle $+\frac{\alpha}{2}$ positif autour de l'axe O_2x . Dans la pratique α est très petit ($\alpha \ll 1$).

4.3.2.1 Montrer à l'aide d'un schéma, que le dispositif interférentiel ainsi obtenu est équivalent à un coin d'air symétrique dont on déterminera l'angle. Par la suite on s'intéressera aux interférences localisées au voisinage du coin d'air.

4.3.2.2 Montrer que l'éclairement résultant peut se mettre sous la forme :

$$I = I_0 \cos^2 \beta z \quad (5)$$

et donner l'expression de β en fonction de α et λ .

4.3.2.3 En déduire une expression possible de l'amplitude réelle de l'onde lumineuse correspondante.

4.3.2.4 En déduire que tout se passe comme si l'image de la fente F donnée par L_2 et S_p sur M_2 avait une transmission non uniforme décrite par le coefficient de transmission en amplitude t donné par :

$$t(z) = \cos \beta z \quad (6)$$

4.3.2.5 Quelle valeur particulière α_0 faut-il donner à l'angle α pour que $t(z)$ s'annule pour la première fois aux bords du faisceau de largeur D' éclairant le miroir M_2 ? On exprimera α_0 en fonction de λ , D et des distances focales images f_{i1} de L_1 et f_{i2} de L_2 .

4.3.2.6 Où se trouve l'image géométrique du foyer du télescope donnée par le système composé de l'interféromètre de MICHELSON et de la lentille L_3 ?

4.3.3 Les questions suivantes demandent des réponses qualitatives sans aucun calcul.

- 4.3.3.1** Dans la réalité, la pupille d'entrée du télescope est circulaire. Il est donc nécessaire de procéder à une apodisation à deux dimensions. Comment doit-on modifier le montage interférométrique précédent pour pouvoir réaliser une telle apodisation ?
- 4.3.3.2** Comment faut-il procéder pour réaliser une apodisation à l'aide d'une transmittance en $\cos^2$, en $\cos^N$?

fin de l'énoncé