

5. (a) Montrer que pour tout $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.
- (b) Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note L_i l'unique polynôme de $\mathcal{P}_n$ tel que $f_n(L_i) = \varepsilon_i$ où $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$; on rappelle que $\varepsilon_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_1 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$.
- i. Vérifier que pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{0, 1, \dots, n\}$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
- ii. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.
- (c) Si $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$, exprimer le polynôme P_y en fonction de $L_0, L_1, \dots, L_n$ et $y_0, y_1, \dots, y_n$. Que vaut $\sum_{i=0}^n L_i$?

2^{ème} Partie : Problème aux moindres carrés

Soient p et q deux entiers naturels non nuls; on muni l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$) de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$) et on note $\|\cdot\|_p$ (resp. $\|\cdot\|_q$) la norme associée. On rappelle que $\langle u, v \rangle_p = {}^t v u$, $u, v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note encore M l'application linéaire de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à M ; ainsi $\text{Ker } M = \{x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}); Mx = 0\}$ et $\text{Im } M = \{Mx; x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}$.

On considère $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$; le problème aux moindres carrés associé à A et b est la recherche des vecteurs de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|b - Ax\|_p^2$ lorsque x décrit $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

- Si $u \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur tel que ${}^t A A u = {}^t A b$.
 - Montrer que le vecteur $b - Au$ est orthogonal à $\text{Im}(A)$ et en déduire que Au est la projection orthogonale de b sur $\text{Im}(A)$.
 - Justifier que $\|b - Au\|_p^2 = \min\{\|b - Av\|_p^2; v \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}$ et préciser tous les éléments $v \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ en lesquels ce minimum est atteint.
- Réciproquement, si $u \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur qui réalise le minimum de la quantité $\|b - Ax\|_p^2$ lorsque x décrit $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, prouver que ${}^t A A u = {}^t A b$; on montrera pour cela que le vecteur ${}^t A A u - {}^t A b$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.
- Montrer que si $x \in \text{Ker}({}^t A A)$ alors $\langle Ax, Ax \rangle_p = 0$.
 - En déduire que $\text{Ker } A = \text{Ker}({}^t A A)$.
 - Comparer alors $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}({}^t A A)$.
 - Montrer que $\text{Im}({}^t A A) \subset \text{Im } {}^t A$ et en déduire que ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Montrer qu'une solution du problème aux moindres carrés cité ci-dessus existe toujours et qu'elle est exactement une solution d'un système linéaire à préciser.
 - Montrer que le problème a une unique solution si et seulement si $\text{Ker } A = \{0\}$.

3^{ème} Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels $y_0, y_1, \dots, y_n$ qui sont respectivement les images des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ par une fonction φ , et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) := \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale λ_m de ladite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction φ aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle de qualité.

On utilise les notations des parties précédentes.

A. Étude dans le cas $m \geq n + 1$

1. Donner un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.
2. En déduire la valeur minimale λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$, et préciser l'ensemble des polynômes en lesquels ce minimum est atteint.

B. Étude dans le cas $m \geq n$

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1, m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1, 1}(\mathbb{R})$$

1. (a) Expliciter les coefficients de la matrice tAA .
(b) Montrer que la matrice A est de rang $m + 1$; on pourra montrer que ces colonnes sont linéairement indépendantes ou utiliser une autre méthode.
(c) En déduire que la matrice tAA est inversible.

$$2. \text{ Soit } P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathcal{P}_m, \text{ on pose } V_P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

- (a) Exprimer le produit AV_P à l'aide des valeurs prises par P aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.
(b) En déduire que $\Phi_m(P) = \|b - AV_P\|_{n+1}^2$.
3. (a) Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathcal{P}_m$ qui réalise le minimum de la quantité $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$.
(b) Montrer que V_{P_0} est l'unique solution du système linéaire ${}^tAAZ = {}^tAb$, d'inconnue Z .
(c) Que vaut λ_m ?

4. Application

On prend $n = 3, m = 3, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 0$

- (a) Calculer les matrices A et tAA .
- (b) Calculer le vecteur tAb .
- (c) Résoudre le système linéaire ${}^tAAZ = {}^tAb$, d'inconnue Z , par la méthode de pivot de Gauss.
- (d) Quel est le polynôme P_0 de degré ≤ 3 qui minimise Φ_3 sur $\mathcal{P}_3$? Que vaut λ_3 ?
- (e) Tracer le graphe de la fonction $t \mapsto P_0(t)$ et représenter les points (x_i, y_i) sur le même graphique.

FIN DE L'ÉPREUVE

• • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr