4) Soient $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit l'application p sur $\mathbb{N}^*$ par :

$p(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$.

a) Pour quelles valeurs de λ, l'application p est une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, P(\mathbb{N}^*))$; où $P(\mathbb{N}^*)$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^*$?

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère l'événement :

$A_m = \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m \text{ divise } n\}$. Donner la valeur de la probabilité $p(A_m)$.

c) Soient m, m' deux entiers naturels non nuls. Montrer que les événements A_m et $A_{m'}$ sont indépendants si et seulement si les entiers m et m' sont premiers entre eux.

d) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ...). On considère l'ensemble

$D_n = \{k \in \mathbb{N}^* : k \text{ est premier avec } p_i;\ \forall i \leq n\}$

Exprimer la probabilité $p(D_n)$ en fonction des $p_i, i \leq n$.

e) En justifiant l'égalité $p(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n) = \lim_{n\to+\infty} p(D_n)$, montrer que

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - \frac{1}{(p_n)^s})}$$

f) Le but de cette question est de montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge.

Supposons que cette série converge.

i) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1-\frac{1}{p_n})^{-1}$ est convergente. En déduire que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1-\frac{1}{p_n})^{-1}$ converge. On note par l sa limite.

ii) En utilisant la question 4) e) montrer que $\zeta(s) \leq l$, pour tout $s > 1$.

iii) Utiliser la question 3) pour conclure.

Problème 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$

1) Justifier l'existence de I_n et de J_n.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1491 - Wadifa Info - page 1/3

2) Trouver une relation de récurrence liant I_{n+1} et I_n. En déduire que $I_n = (-1)^n.n!$.

3) Donner la valeur de I_n, pour tout entier naturel non nul.

4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :
$f(x) = (\ln(x))^{2k}$
Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni d'un repère orthonormé, on désigne par A l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, les deux droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ et la droite horizontale d'équation $y = -1$. Par B, on désigne l'aire du rectangle $PQRS$, avec $P(1,-1), Q(0,-1), R(0,-2k-2)$ et $S(1,-2k-2)$.
   a) Vérifier que les aires A et B sont des valeurs entières
   b) Montrer que A est un multiple de B si et seulement si le nombre $2k+1$ est premier.

5) Soient m, n deux entiers naturels non nuls. On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_{(n,m)}(x) = (n - x^m)e^{-x}$.
   a) Donner l'allure de la courbe représentative de $f_{(3,2)}$.
   b) L'aire totale de la courbe de $f_{(n,m)}$ se compose de deux parties situées l'une au dessus de l'axe Ox, notée $A_{n,m}$, et l'autre au dessous de l'axe Ox, notée $A'_{n,m}$.
      i) Exprimer $A_{n,m}$ et $A'_{n,m}$ sous forme d'intégrales.
      ii) Vérifier que $A_{6,3} = A'_{6,3}$ et que $A_{5,2} \neq A'_{5,2}$.
      iii) Soit $K = \{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 : A_{n,m} = A'_{n,m}\}$. Montrer que K et son complémentaire $\overline{K}$ dans $(\mathbb{N}^*)^2$ sont deux parties non vides et infinies ? Déterminer la nature de ces infinis.
      iv) Montrer que, pour tout $(n,m) \in K$, on a l'équivalence suivante:
      $(m+1)$ est un nombre premier si et seulement si $(m+1)$ divise $(n+1)$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1491 - Wadifa Info - page 2/3

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج مسلك تكوين أطر الإدارة التربوية - اختبار في علوم التربية - دورة 2025

Modèle : Concours d'accès à la filière de formation des cadres de l'administration pédagogique - épreuve de sciences de

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1329

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me