

4) Soient  $s > 1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On définit l'application  $p$  sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$p(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}.$$

a) Pour quelles valeurs de  $\lambda$ , l'application  $p$  est une probabilité sur  $(\mathbb{N}^*, P(\mathbb{N}^*))$  ; où  $P(\mathbb{N}^*)$  désigne l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}^*$  ?

b) Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'événement :

$A_m = \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m \text{ divise } n\}$ . Donner la valeur de la probabilité  $p(A_m)$ .

c) Soient  $m, m'$  deux entiers naturels non nuls. Montrer que les événements  $A_m$  et  $A_{m'}$  sont indépendants si et seulement si les entiers  $m$  et  $m'$  sont premiers entre eux.

d) Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant ( $p_1 = 2, p_2 = 3 \dots$ ). On considère l'ensemble

$$D_n = \{k \in \mathbb{N}^* : k \text{ est premier avec } p_i, \forall i \leq n\}$$

Exprimer la probabilité  $p(D_n)$  en fonction des  $p_i, i \leq n$ .

e) En justifiant l'égalité  $p(\cap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(D_n)$ , montrer que

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{(p_n)^s})}$$

f) Le but de cette question est de montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$  diverge.

Supposons que cette série converge.

i) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n})^{-1}$  est convergente. En

déduire que le produit infini  $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{p_n})^{-1}$  converge. On

note par  $l$  sa limite.

ii) En utilisant la question 4) e) montrer que  $\zeta(s) \leq l$ , pour tout  $s > 1$ .

iii) Utiliser la question 3) pour conclure.

### Problème 2.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n dt$  et  $J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$

1) Justifier l'existence de  $I_n$  et de  $J_n$ .

2) Trouver une relation de récurrence liant  $I_{n+1}$  et  $I_n$ . En déduire que  $I_n = (-1)^n \cdot n!$ .

3) Donner la valeur de  $I_n$ , pour tout entier naturel non nul.

4) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , considérons la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  
 $f(x) = (\ln(x))^{2k}$

Le plan  $\mathbb{R}^2$  étant muni d'un repère orthonormé, on désigne par A l'aire du domaine limité par la courbe représentative de  $f$ , les deux droites verticales d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$  et la droite horizontale d'équation  $y = -1$ . Par B, on désigne l'aire du rectangle PQRS, avec  $P(1, -1), Q(0, -1), R(0, -2k - 2)$  et  $S(1, -2k - 2)$ .

a) Vérifier que les aires A et B sont des valeurs entières

b) Montrer que A est un multiple de B si et seulement si le nombre  $2k + 1$  est premier.

5) Soient  $m, n$  deux entiers naturels non nuls. On considère la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_{(n,m)}(x) = (n - x^m)e^{-x}$ .

a) Donner l'allure de la courbe représentative de  $f_{(3,2)}$ .

b) L'aire totale de la courbe de  $f_{(n,m)}$  se compose de deux parties situées l'une au dessus de l'axe  $Ox$ , notée  $A_{n,m}$ , et l'autre au dessous de l'axe  $Ox$ , notée  $A'_{n,m}$ .

i) Exprimer  $A_{n,m}$  et  $A'_{n,m}$  sous forme d'intégrales.

ii) Vérifier que  $A_{6,3} = A'_{6,3}$  et que  $A_{5,2} \neq A'_{5,2}$ .

iii) Soit  $K = \{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 : A_{n,m} = A'_{n,m}\}$ . Montrer que K et son complémentaire  $\bar{K}$  dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  sont deux parties non vides et infinies ? Déterminer la nature de ces infinies.

iv) Montrer que, pour tout  $(n, m) \in K$ , on a l'équivalence suivante:

$(m + 1)$  est un nombre premier si et seulement si

$(m + 1)$  divise  $(n + 1)$